

Chapitre 6 : Probabilités conditionnelles et indépendance

I. Probabilité conditionnelle

Définition : Soit A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$.

On appelle **probabilité conditionnelle** de B sachant A , la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé. Elle est notée $P_A(B)$ et est définie par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Exemple :

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

Soit A l'événement "Le résultat est un carreau".

Soit B l'événement "Le résultat est un valet".

Calculer $P_A(B)$.

$$\begin{aligned} P_A(B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{1}{32}}{\frac{8}{32}} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Propriétés : Soit A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$.

1. $0 \leq P_A(B) \leq 1$
2. $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$
3. $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

$$\begin{aligned} 1. \circ P_A(B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \geq 0 \text{ car } P(A \cap B) \geq 0 \text{ et } P(A) > 0 \\ \text{ou } P(A \cap B) &\leq P(A) \text{ car } A \cap B \subset A \text{ donc } 0 \leq P_A(B) \leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \circ P_A(\bar{B}) &= \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)} \text{ or } P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \text{ car } B \cup \bar{B} = \Omega \text{ et } B \cap \bar{B} = \emptyset \\ \text{Donc } P_A(\bar{B}) &= \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1 - P_A(B) \end{aligned}$$

$$3. \circ P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

II. Arbre pondéré

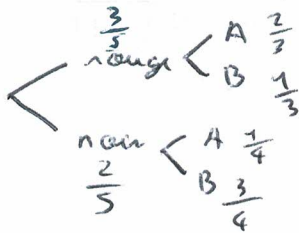
Exemple : Un sac contient 50 boules, dont 30 boules rouges et 20 boules noires. Sur ces boules sont marquées les lettres A ou B .

Sur 10 boules rouges, il est marqué la lettre B .

Sur 5 boules noires, il est marqué la lettre A .

On tire au hasard une boule dans le sac.

Considérons les événements R : « la boule tirée est rouge », N : « la boule tirée est noire », A : « la boule est marquée de la lettre A » et B : « la boule est marquée de la lettre B »



Propriétés :

Dans un arbre pondéré :

- La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité de l'événement correspondant à un « chemin » est égale au produit des probabilités inscrites sur les branches de ce « chemin ».

Exemple 3 :

On reprend l'exemple précédent.

On a : $P(R \cap A) = P(R) \times P_R(A)$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{2}{5}$$

III. Formule des probabilités totales.

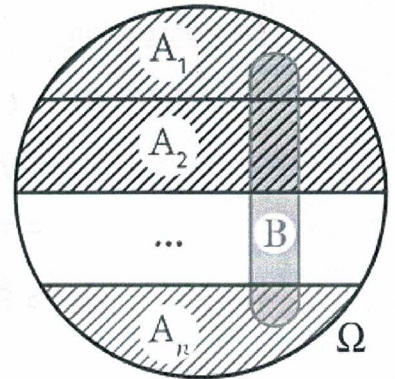
Définition et propriété :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient des événements non vides $A_1, A_2, \dots, A_n$ de l'univers Ω , deux à deux disjoints et tels que leur réunion forme l'univers Ω .
pas d'intersection en commun

Soit B un événement.

hypothèse

- • On dit que $A_1, A_2, \dots, A_n$ constituent une **partition** de Ω .
 • $P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$



Exemple :

On reprend l'expérience aléatoire de l'exemple précédent.
 Calculer $P(A)$.

R et N forment une partition de l'univers Ω

D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(R \cap A) + P(N \cap A) \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

IV. Probabilités et indépendance

1) Indépendance de deux événements

Définition : On dit que deux événements A et B de probabilité non nulle sont **indépendants** lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Propriété :

A et B sont indépendants, si et seulement si, $P_A(B) = P(B)$

Exemple : A : "Tirer un as" et B : "Tirer un cœur"

$$P(A \cap B) = \frac{1}{32} \quad \text{et} \quad P(A) \times P(B) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$$

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ donc A et B sont indépendants

Contre-exemple :

A : "Tirer un pique" et B : "Tirer un cœur"

$$P(A \cap B) = 0 \quad \text{et} \quad P(A) \times P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ donc A et B sont dépendants

Remarque :

Il ne faut pas confondre événements indépendants et événements incompatibles.

Deux événements sont dit incompatibles si $P(A \cap B) = 0$
A et B

Propriété : Si A et B sont indépendants alors $\bar{A}$ et B sont indépendants.

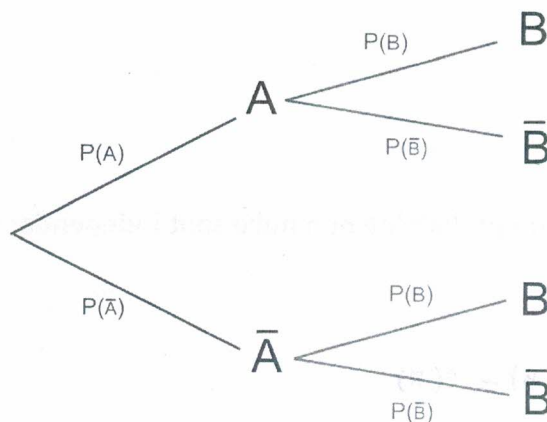
Démonstration :

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) \times P(B) &= (1 - P(A)) \times P(B) \\ &= P(B) - P(A) \times P(B) \\ &= P(B) - P(A \cap B) \quad \left. \begin{array}{l} \text{A et B indépendants} \\ \text{par la formule de probabilités totale} \end{array} \right\} \\ &= P(\bar{A} \cap B) \text{ donc } \bar{A} \text{ et } B \text{ sont indépendants} \end{aligned}$$

2) Succession de deux épreuves indépendantes

a) Arbre pondéré

On peut représenter une succession de deux épreuves indépendantes par un arbre dont les probabilités ne sont pas conditionnelles car les événements sont indépendants.



Remarque :

$P_A(B) = P(B)$ car A et B sont indépendants

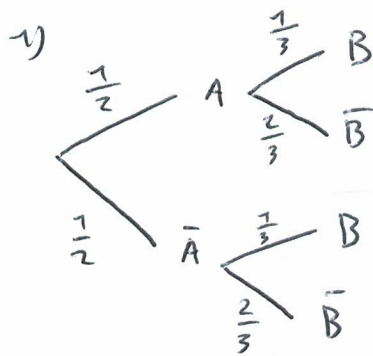
Ainsi : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Exemple :

Considérons l'expérience aléatoire constituée d'un lancer de pièce et d'un lancer de dé à six faces.

Soit l'événement A : « Obtenir face » et B : « obtenir 5 ou plus ».

- 1) Représenter la situation avec un arbre pondéré.
- 2) Calculer $P(A \cap \bar{B})$.



2) $P(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P(\bar{B})$
 $= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$
 $= \frac{1}{3}$

. b) Tableau à double entrée

On peut représenter une succession de deux épreuves indépendantes dans un tableau à double entrée où par exemple la première ligne contient les résultats de la première épreuve, et la première colonne ceux de la deuxième (ou inversement).

	A	$\bar{A}$
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$
$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$

Exemple :

On reprend l'expérience aléatoire de l'exemple précédent.

Le tableau à double entrée correspondant est :

	A	$\bar{A}$
B	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$\bar{B}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$